А. И. Зейфман, Я. А. Сатин, К. М. Киселева, Об оценках скорости сходимости для некоторых моделей массового обслуживания с неполно заданными интенсивностями, *Информ. и её примен.*, 2019, том 13, выпуск 3, 14–19

DOI: https://doi.org/10.14357/19922264190303

ИНФОРМАТИКА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 14–19

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕПОЛНО ЗАДАННЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ*

А. И. Зейфман[1], Я. А. Сатин[2], К. М. Киселева[3]

Аннотация: Рассматриваются некоторые модели массового обслуживания с неполно заданными интенсивностями. Авторы изучают систему $M_t/M_t/S$ с произвольным числом серверов S и систему $M_t/M_t/S/S$ (модель Эрланга) с интенсивностями, удовлетворяющими соответствующим условиям. Для получения оценок скорости сходимости используется понятие логарифмической нормы операторной функции и связанные с ней оценки нормы матрицы Коши.

Ключевые слова: система массового обслуживания; неполно заданные интенсивности; скорость сходимости; эргодичность; логарифмическая норма; $M_t/M_t/S$; $M_t/M_t/S/S$

DOI: 10.14357/19922264190303

1 Введение

В работе изучаются простые нестационарные системы обслуживания $M_t/M_t/S/S$ и $M_t/M_t/S$ в ситуации, когда интенсивности поступления и обслуживания требований являются 1-периодическими функциями времени и известны не сами эти функции, а их «средние» значения, т. е. числа

$$\lambda^* = \int\limits_0^1 \lambda(t)\,dt\,; \quad \mu^* = \int\limits_0^1 \mu(t)\,dt\,.$$

Такого типа модели (в которых известны не сами интенсивности поступления и обслуживания требований, а какие-либо их характеристики) достаточно часто встречаются в современной литературе (см., например, [1–6]).

Оценки скорости сходимости для рассматриваемых моделей в стационарной и нестационарной ситуациях изучались во многих работах, (см., например, [7–17] и приведенную в этих работах библиографию).

Сами эти модели достаточно стандартны, они характеризуются числом серверов S, а также интенсивностями поступления и обслуживания требований $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ соответственно.

Число требований $X(t)$ описывается неоднородным процессом рождения и гибели (ПРГ):

- для системы $M_t/M_t/S/S$ с конечным пространством состояний $0, 1. \ldots, S$ и интенсивностями $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ и $\mu_k(t) = k\mu(t)$;
- для системы $M_t/M_t/S$ со счетным пространством состояний $0, 1. \ldots, S, \ldots$ и интенсивностями $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ и $\mu_k(t) = \mu(t)\min(k, S)$.

Функции $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ предполагаются неотрицательными, 1-периодическими и интегрируемыми на $[0, 1]$.

Обозначим через

$$p_{ij}(s,t) = \Pr\{X(t) = j\,|X(s) = i\}\,, \qquad i, j \geq 0 \;\; 0 \leq s \leq t\,,$$

переходные вероятности процесса $X = X(t)$, а его вероятности состояний — через

$$p_i(t) = \Pr\{X(t) = i\}\,.$$

Будем обозначать через $\|\bullet\|$ l_1-норму вектора и матрицы, т. е. $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$, а $\|B\| = \max_j \sum_i |b_{ij}|$ при $B = (b_{ij})_{i,j=0}^S$, а через Ω — множество всех стохастических векторов, т. е. множество векторов с неотрицательными координатами и единичной l_1-нормой.

Через $E(t,k) = E\{X(t)\,|X(0) = k\}$ будем далее обозначать математическое ожидание процесса (среднее число требований) в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00020).

[1] Вологодский государственный университет; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Вологодский научный центр Российской академии наук, a_zeifman@mail.ru

[2] Вологодский государственный университет, yacovi@mail.ru

[3] Вологодский государственный университет, ksushakiseleva@mail.ru

Напомним, что марковская цепь $X(t)$ называется слабо эргодичной, если $\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ для любых начальных условий $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$ и любом $s \geq 0$. Марковская цепь $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$, если $E(t,k) - \phi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и любом k.

2 Оценки для системы $M_t/M_t/S/S$

Прежде всего отметим, что слабая эргодичность $X(t)$ эквивалентна условию $\lambda^* + \mu^* > 0$, это вытекает, например, из следствия 1 [15].

Сформулируем получаемые оценки отдельно для каждого из двух случаев.

Теорема 1. *Пусть* $\mu^* > 0$. *Тогда* $X(t)$ *имеет предельный 1-периодический режим*

$$\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \ldots, \pi_S(t))^{\mathrm{T}}$$

и соответствующее предельное среднее

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{S} k\pi_k(t)$$

и при любом $t \geq 0$ *выполняются следующие оценки скорости сходимости*:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi(t)\| \leq 8Se^{-\mu^*(t-1)} \qquad (1)$$

при любых начальных условиях;

$$|E(t,k) - \phi(t)| \leq 8S^2 e^{-\mu^*(t-1)} \qquad (2)$$

при любом k. *При* $\lambda^* > 0$ *вместо* (1) *и* (2) *справедлива оценка*:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi(t)\| \leq 8Se^{-\lambda^*(t-1)/S}. \qquad (3)$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим положительные числа d_i и положим

$$d = \inf_{i\geq 1} d_i = 1\,;\ W = \inf_{i\geq 1} \frac{d_i}{i}\,;$$

$$g_i = \sum_{n=1}^{i} d_n; \qquad G = \sum_{i=1}^{S} d_i.$$

Рассмотрим теперь выражения:

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - {} - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t)\,,\quad k \geq 0\,;$$

$$\beta_*(t) = \inf_{k\geq 0} \alpha_k(t)\,. \qquad (4)$$

Тогда, применяя соответствующее преобразование прямой системы Колмогорова, из следствия 1 [15] получаем такие оценки:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi(t)\| \leq \frac{8G}{d}\, e^{-\int_0^t \beta_*(\tau)\,d\tau};$$

$$|E(t,k) - \phi(t)| \leq \frac{8G}{W}\, e^{-\int_0^t \beta_*(\tau)\,d\tau}.$$

Положим вначале все $d_i = 1$, тогда все $\alpha_k(t) = \beta_* = \mu(t)$, и с учетом неравенства

$$e^{-\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau} \leq e^{-\int_0^{[t]} \mu(\tau)\,d\tau} \leq e^{-\mu^*(t-1)}$$

получаем оценки (1) и (2).

Теперь, следуя ходу рассуждений теоремы 93 из [13], положим

$$d_1 = 1\,; \quad d_{k+1} = \frac{S-1}{S}\, d_k < 1\,.$$

Тогда получим все $\alpha_k(t) > \lambda(t)/S$, откуда $\beta_* \geq \lambda(t)/S$. При этом $G \leq S$, а $e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau} \leq e^{-\lambda^*(t-1)}$ и, значит, справедливо неравенство (3).

3 Оценки для системы $M_t/M_t/S$

Отметим, что для наличия слабой эргодичности достаточно, чтобы выполнялось условие $\lambda^* < S\mu^*$.

Рассмотрим треугольную матрицу D:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и пространства последовательностей l_{1D}:

$$l_{1D} = \left\{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \ldots)^{\mathrm{T}} : \|\mathbf{z}\|_{1D} \equiv \|D\mathbf{z}\| < \infty\right\}$$

и l_{1E}:

$$l_{1E} = \left\{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \ldots)^{\mathrm{T}} : \|\mathbf{z}\|_{1E} \equiv \sum k|p_k| < \infty\right\}.$$

Выберем число $\delta \in (1, S/(S-1))$.Тогда, как показано в [13, параграф 4.2], в (4) получается

$$\beta_*(t) \geq (S\mu(t) - \delta\lambda(t))\left(1 - \delta^{-1}\right).$$

А теперь, применяя теорему 1 и следствие 1 из работы [17], получаем общие оценки:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq {} \leq 4e^{-\int\limits_0^t \beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\geq 1} g_i |p_i^*(0) - p_i^{**}(0)|\,;$$

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1E} = |\phi(t) - E(t,k)| \leq {} \leq \frac{4}{W}\, e^{-\int\limits_0^t \beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\geq 1} g_i |p_i^*(0) - p_i^{**}(0)|$$

при любом $t \geq 0$ и любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(0)$ и $\mathbf{p}^{**}(0)$.

Далее, имеем в 1-периодическом случае

$$e^{-\int\limits_0^t \left(S\mu(\tau)-\delta\lambda(\tau)\right)\left(1-\delta^{-1}\right)d\tau} \leq$$

$$\leq e^{-\int\limits_0^{[t]} \left(S\mu(\tau)-\delta\lambda(\tau)\right)\left(1-\delta^{-1}\right)d\tau} e^{\int\limits_{[t]}^t \delta\lambda(\tau)\left(1-\delta^{-1}\right)d\tau} \leq$$

$$\leq e^{\lambda^*(\delta-1)-(S\mu^*-\delta\lambda^*)\left(1-\delta^{-1}\right)(t-1)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\lambda^* < S\mu^*$. *Тогда* $X(t)$ *имеет предельный 1-периодический режим* $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \ldots)^{\mathrm{T}}$ *и соответствующее предельное среднее* $\phi(t) = \sum_{k\geq 0} k\pi_k(t)$ *и выполняются следующие оценки скорости сходимости*:

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\pi(t)\|_{1D} \leq 4e^{\lambda^*(\delta-1)-(S\mu^*-\delta\lambda^*)\left(1-\delta^{-1}\right)(t-1)} \times \\ \times \sum_{i\geq 1} g_i |p_i^*(0)-\pi_i(0)|\,;$$

$$|\phi(t)-E(t,k)| \leq \\ \leq \frac{4g_k}{W}\, e^{\lambda^*(\delta-1)-(S\mu^*-\delta\lambda^*)\left(1-\delta^{-1}\right)(t-1)}.$$

4 Примеры

Рассмотрим модели систем обслуживания $M_t/M_t/S/S$ и $M_t/M_t/S$ с интенсивностями $\mu = 1$, $\lambda(t) = \lambda(1 + M \sin 2\pi\omega t)$ и различными вариациями «амплитуды» M и «частоты» ω. Выбор $S = 100$ в первом примере обусловлен возможностью непосредственного вычисления предельных характеристик этой системы. Для модели $M_t/M_t/S$ построение предельного среднего проводится с помощью усечений процессами с конечным пространством состояний в соответствии с методикой [17], здесь для простоты взято $S = 10$. На приведенных рис. 1–6 показано влияние амплитуды и частоты интенсивности поступления требований на предельные характеристики процесса, описывающего число требований в системе. Интересно отметить, что «двойное среднее», т. е. величина $\mathsf{E} = \int_0^1 \phi(t)\,dt$, по крайней мере в пределах получаемой точности, оказывается не зависящей от этих характеристик.

Для построения всех интересующих величин задача Коши для прямой системы Колмогорова с начальным условием, соответствующим ситуации $X(0) = 0$, решается на $[0, t^*]$, а затем нужная величина с точностью 10^{-3} строится на отрезке $[t^*, t^*+1]$. Во втором примере предварительно выбирается нужная размерность «усеченного» процесса N.

Пример I. Система $M_t/M_t/S/S$, $S = 100$, $\lambda = 10$. Получаем $t^* = 15$. Рассмотрены случаи:

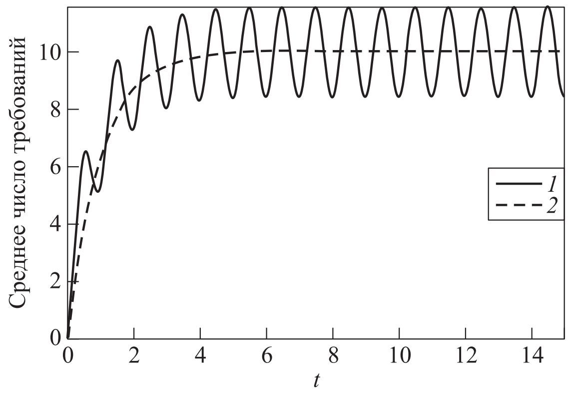

Рис. 1 Среднее число требований в системе $E(t,0)$ на отрезке [0, 15]: *1* — пример I, случай 1; *2* — соответствующий однородный процесс

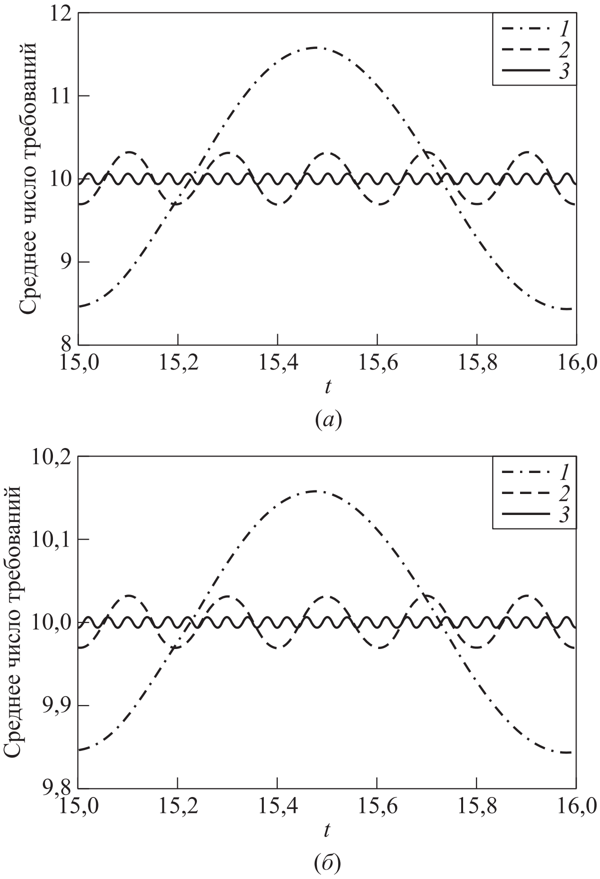

Рис. 2 Среднее число требований в системе $E(t,0)$ на отрезке [15, 16], пример I, амплитуды $M = 1$ (*а*) и 0,1 (*б*): *1* — $w = 1$; *2* — 5; *3* — $w = 25$

(1) $M = 1, \omega = 1$;

(2) $M = 1, \omega = 5$;

(3) $M = 1, \omega = 25$;

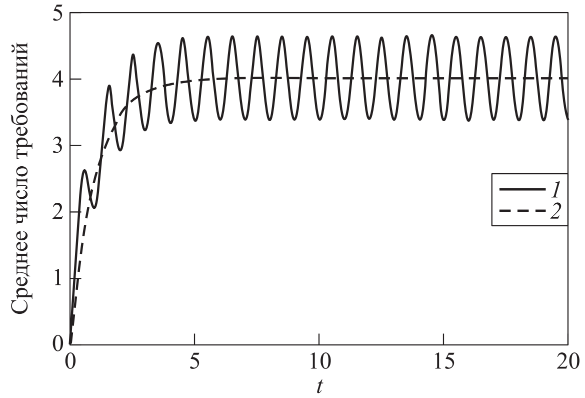

Рис. 3 Среднее число требований в системе $E(t, 0)$ на отрезке $[0, 20]$: *1* — пример II, случай 1; *2* — соответствующий однородный процесс

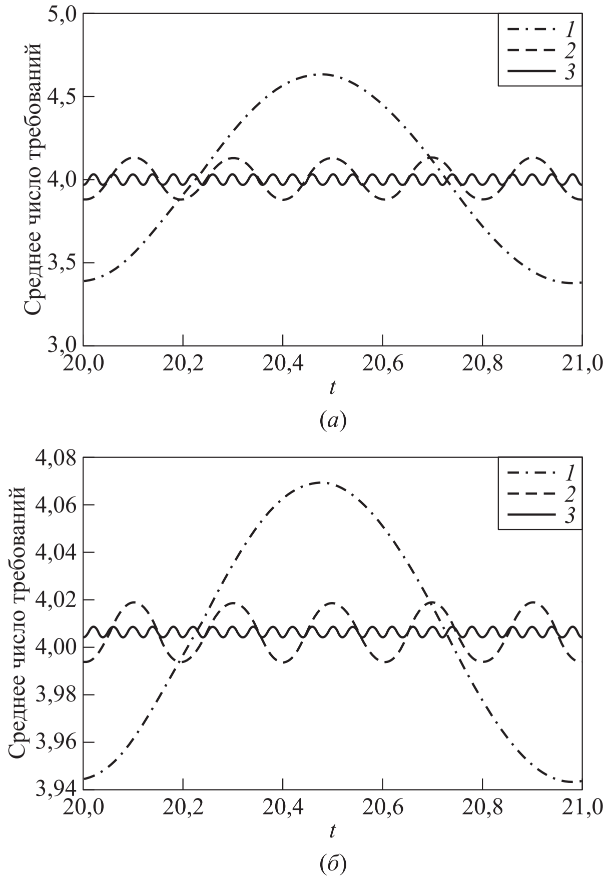

Рис. 4 Среднее число требований в системе $E(t, 0)$ на отрезке $[20, 21]$, пример II, амплитуды $M = 1$ (*а*) и 0,1 (*б*): *1* — $w = 1$; *2* — 5; *3* — $w = 25$

(4) $M = 0{,}1$, $\omega = 1$;

(5) $M = 0{,}1$, $\omega = 5$;

(6) $M = 0{,}1$, $\omega = 25$.

При этом $\mathsf{E} \approx \int_0^1 \phi(t)\,dt = 10{,}000$.

Пример II. Система $M_t/M_t/S$, $S = 10$, $\lambda = 4$. Здесь получается $N = 100$, $t^* = 20$. Рассмотрены случаи:

(1) $M = 1$, $\omega = 1$;

(2) $M = 1$, $\omega = 5$;

(3) $M = 1$, $\omega = 25$;

(4) $M = 0{,}1$, $\omega = 1$;

(5) $M = 0{,}1$, $\omega = 5$;

(6) $M = 0{,}1$, $\omega = 25$.

При этом $\mathsf{E} \approx \int_0^1 \phi(t)\,dt = 4{,}006$.

Литература

1. *Guo Y., Wang Z.* Stability of Markovian jump systems with generally uncertain transition rates // J. Frankl. Inst., 2013. Vol. 350. Iss. 9. P. 2826–2836.
2. *Crawford F. W., Minin V. N., Suchard M. A.* Estimation for general birth-death processes // J. Am. Stat. Assoc., 2014. Vol. 109. Iss. 506. P. 730–747.
3. *Dong J., Whitt W.* Stochastic grey-box modeling of queueing systems: Fitting birth-and-death processes to data // Queueing Syst., 2015. Vol. 79. P. 391–426.
4. *Zhu D. M., Ching W. K., Guu S. M.* Sufficient conditions for the ergodicity of fuzzy Markov chains // Fuzzy Set. Syst., 2016. Vol. 304. P. 82–93.
5. *Cruz F. R. B., Quinino R. C., Ho L. L.* Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue // Commun. Stat. Simulat., 2017. Vol. 46. P. 7319–7331.
6. *Ho L. S. T., Xu J., Crawford F. W., Minin V. N., Suchard M. A.* Birth/birth–death processes and their computable transition probabilities with biological applications // J. Math. Biol., 2018. Vol. 76. P. 911–944.
7. *Зейфман А. И.* Некоторые свойства системы с потерями в случае переменных интенсивностей // Автоматика и телемеханика, 1989. Вып. 1. С. 107–113.
8. *Kijima M.* On the largest negative eigenvalue of the infinitesimal generator associated with $M/M/n/n$ queues // Oper. Res. Lett., 1990. Vol. 9. P. 59–64.
9. *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stoch. Proc. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.
10. *Fricker C., Robert P., Tibi D.* On the rate of convergence of Erlang's model // J. Appl. Probab., 1999. Vol. 36. P. 1167–1184.
11. *Voit M.* A note of the rate of convergence to equilibrium for Erlang's model in the subcritical case // J. Appl. Probab., 2000. Vol. 37. P. 918–923.
12. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing Syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.
13. *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. — М.: ЭЛЕКС-КМ, 2008. 168 с.

14. *Van Doorn E. A., Zeifman A. I.* On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system // Queueing Syst., 2009. Vol. 63. P. 241–252.
15. *Зейфман А. И.* О нестационарной модели Эрланга // Автоматика и телемеханика, 2009. Вып. 12. С. 71–80.
16. *Van Doorn E. A., Zeifman A. I., Panfilova T. L.* Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth–death processes // Theor. Probab. Appl., 2010. Vol. 54. P. 97–113.
17. *Zeifman A., Satin Ya., Korolev V., Shorgin S.* On truncations for weakly ergodic inhomogeneous birth and death processes // Int. J. Appl. Math. Comp., 2014. Vol. 24. P. 503–518.

Поступила в редакцию 06.06.19

ON THE BOUNDS OF THE RATE OF CONVERGENCE FOR SOME QUEUEING MODELS WITH INCOMPLETELY DEFINED INTENSITIES

A. I. Zeifman[1,2,3], Y. A. Satin[1], and K. M. Kiseleva[1]

[1]Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation

[2]Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Sciences and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

[3]Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation

Abstract: The authors consider some queuing systems with incompletely defined 1-periodical intensities under corresponding conditions. The authors deal with $M_t/M_t/S$ queue for any number of servers S and $M_t/M_t/S/S$ (the Erlang model). Estimates of the rate of convergence in weakly ergodic situation are obtained by applying the method of the logarithmic norm of the operator of a linear function. The examples with exact given values of intensities and different variations of amplitude and frequency are considered, ergodicity conditions and estimates of the rate of convergence are obtained for each model, and plots of the effect of intensities' amplitude and frequency of incoming requirements on the limiting characteristics of the process are constructed. The authors use the general algorithm to build graphs, it is associated with solving the Cauchy problem for the forward Kolmogorov system on the corresponding interval, which has already been used by the authors in previous papers.

Keywords: queuing systems; incompletely defined intensities; rate of convergence; ergodicity; logarithmic norm; $M_t/M_t/S$ queue; $M_t/M_t/S/S$ queue

DOI: 10.14357/19922264190303

Acknowledgments

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No 19-11-00020).

References

1. Guo, Y., and Z. Wang. 2013. Stability of Markovian jump systems with generally uncertain transition rates. *J. Frankl. Inst.* 350(9):2826–2836.
2. Crawford, F. W., V. N. Minin, and M. A. Suchard. 2014. Estimation for birth-death processes. *J. Am. Stat. Assoc.* 109(506):730–747.
3. Dong J., and W. Whitt. 2015. Stochastic grey-box modeling of queueing systems: Fitting birth-and-death processes to data. *Queueing Syst.* 79:391–426.
4. Zhu, D. M., W. K. Ching, and S. M. Guu. 2016. Sufficient conditions for the ergodicity of fuzzy Markov chains. *Fuzzy Set. Syst.* 304:82–93.
5. Cruz, F. R. B., R. C. Quinino, and L. L. Ho. 2017. Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue. *Commun. Stat. Simulat.* 46:7319–7331.
6. Ho, L. S. T., J. Xu, F. W. Crawford, V. N. Minin, and M. A. Suchard. 2018. Birth/birth-death processes and their computable transition probabilities with biological applications. *J. Math. Biol.* 76:911–944.
7. Zeifman, A. I. 1989. Some properties of a system with losses in the case of variable rates. *Automat. Rem. Contr.* 50(1):82–87.
8. Kijima, M. 1990. On the largest negative eigenvalue of the infinitesimal generator associated with $M/M/n/n$ queues. *Oper. Res. Lett.* 9:59–64.

9. Zeifman, A. I. 1995. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. *Stoch. Proc. Appl.* 59:157–173.
10. Fricker C., P. Robert, and D. Tibi. 1999. On the rate of convergence of Erlang's model. *J. Appl. Probab.* 36:1167–1184.
11. Voit, M. 2000. A note of the rate of convergence to equilibrium for Erlang's model in the subcritical case. *J. Appl. Probab.* 37:918–923.
12. Zeifman, A., S. Leorato, E. Orsingher, Ya. Satin, and G. Shilova. 2006. Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes. *Queueing Syst.* 52:139–151.
13. Zeifman, A. I., V. E. Bening, and I. A. Sokolov. 2008. *Markovskie tsepi i modeli s nepreryvnym vremenem* [Markov chains and models with continuous time]. Moscow: ELEKS-KM Publs. 168 p.
14. Van Doorn, E. A., and A. I. Zeifman. 2009. On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system. *Queueing Syst.* 63:241–252.
15. Zeifman, A. I. 2009. On the nonstationary Erlang loss model. *Automat. Rem. Contr.* 70(12):2003–2012.
16. Van Doorn, E. A., A. I. Zeifman, and T. L. Panfilova. 2010. Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth–death processes. *Theor. Probab. Appl.* 54:97–113.
17. Zeifman, A., Ya. Satin, V. Korolev, and S. Shorgin. 2014. On truncations for weakly ergodic inhomogeneous birth and death processes. *Int. J. Appl. Math. Comp.* 24:503–518.

Received June 6, 2019

Contributors

Zeifman Alexander I. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Department, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Sciences and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; principal scientist, Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation; a_zeifman@mail.ru

Satin Yacov A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000; yacovi@mail.ru

Kiseleva Ksenia M. (b. 1992) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; ksushakiseleva@mail.ru